Wykład 7
23 kwietnia 2021
10:01

# Miary semi-skończone

Def: Niech $(\Omega, \Sigma, \mu)$ pr. z miarą. Powiemy, że

1) $\mu$ jest skończona, $\mu(\Omega)<\infty$

2) $\mu$ jest $\sigma$-skończona $\exists_{\{\Omega_i\}_{i=1}^{\infty}}$ $\Omega=\bigcup_{i=1}^{\infty}\Omega_i$, $\forall_{i=1,\dots}\ \mu(\Omega_i)<\infty$

3) $\mu$ jest semi-skończona

$$\forall_{A\in\Sigma}\ \mu(A)=\infty \Rightarrow \exists_{B\in\Sigma}\ B\subseteq A \text{ oraz } 0<\mu(B)<\infty$$

Uwaga:

$\mu$ skończona $\Rightarrow$ $\sigma$-skończona $\Rightarrow$ $\mu$ semi-skończona

$i\neq j$, $\Omega_i\cap\Omega_j=\emptyset$, $\mu(\Omega_i)<\infty$

$A\in\Sigma \Rightarrow \mu(A)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A\cap\Omega_i)$

$\mu(A)=\infty \Rightarrow \exists_i\ \mu(A\cap\Omega_i)>0$, $\mu(A\cap\Omega_i)<\infty$

**Przykład 1** $\Sigma=2^{\Omega}$, $\mu$ - miara licząca

$\mu$ skończona $\Leftrightarrow$ $\Omega$ zbiór skończony

$\mu$ $\sigma$-skończona $\Leftrightarrow$ $\Omega$ przeliczalny

$\mu$ jest semi-skończona zawsze

Przykład 2 $\mu(A) = \begin{cases} +\infty, & A \neq \emptyset \\ 0, & A = \emptyset \end{cases}$ nie jest semi-skończona

Uwaga: Dla dowolnej miary $\mu$ rodzina

$$\Sigma_0 = \{A \in \Sigma : \mu(A) < \infty\}$$

jest pierścieniem, a nawet warunkowym $\sigma$-pierścieniem

tzn. $\forall_{\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \Sigma_0} \left( \exists_{B \in \Sigma_0} \forall_n A_n \subseteq B \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma_0 \right)$

Segal 1951 opisał konstrukcję całki startując z $\sigma$-addytywnej funkcji $\mu : \Sigma_0 \to [0, +\infty)$ gdzie $\Sigma_0$ jest dow. warunkowym $\sigma$-pierścieniem

Tw. Dla dowolnej miary $\mu$ wzór

$$\bar{\mu}(A) = \sup\{\mu(B) : B \subseteq A,\ \mu(B) < \infty\}$$

definiuje semi-skończoną miarę na $\Sigma$ ($\bar{\mu} \leq \mu$, $\bar{\mu}|_{\Sigma_0} = \mu|_{\Sigma_0}$). Ponadto

(1) $\mu = \bar{\mu} \iff \mu$ - semi-skończona

(2) Odwzorowanie identyczności na funkcjach daje izometryczny izomorfizm $L_1(\mu) \cong L_1(\bar{\mu})$.

Dowód: $\bar{\mu}(\emptyset) = 0$ jasne. Niech $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \Sigma_1$ parami rozłączne.

$$\bar{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sup\left\{\mu(B) : B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,\ B \in \Sigma_0\right\} \le$$

$B_n = B \cap A_n$
$B_n \subseteq A_n$
$B_n \in \Sigma_0$
$\mu(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} \sup\left\{\mu(B_n) : B_n \subseteq A_n,\ B_n \in \Sigma_0\right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_n)$$

Jeżeli suma skończona, to w powyższej nierówności jest równość:

$$\bar{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \bar{\mu}(A_n)$$

Zatem korzystając z monotoniczności $\bar{\mu}$ mamy

$$\sum_{n=1}^{N} \bar{\mu}(A_n) = \bar{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \le \bar{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

stąd $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_n) \le \bar{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$

Zauważmy, że $\bar{\mu}$ miara, to jest jasne że $\bar{\mu}|_{\Sigma_0} = \mu|_{\Sigma_0}$ oraz $\bar{\mu}$ semi-skończona.

(1) „$\Rightarrow$” oczywiste

„$\Leftarrow$” Niech $A \in \Sigma_1$. Wtedy $\bar{\mu}(A) \le \mu(A)$.

Jeśli $\bar{\mu}(A)=\infty$, to $\bar{\mu}(A)=\mu(A)$. Załóżmy więc że $\boxed{\bar{\mu}(A)<\infty}$. Wtedy $\exists \{B_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq \Sigma_0$ t.że

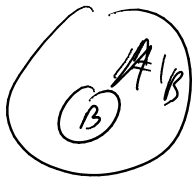
$B_n\subseteq A$ oraz $\lim_{n\to\infty}\mu(B_n)=\bar{\mu}(A)$.

Wtedy dla $B=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$ mamy

$$\mu(B)=\lim_{N\to\infty}\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{N}B_n\Big)\le\left\{\begin{array}{l}\bigcup_{n=1}^{N}B_n\in\Sigma_0\\ \bigcup_{n=1}^{N}B_n\subseteq A\end{array}\right\}\le\bar{\mu}(A)<\infty$$

Z drugiej strony

$$\mu(B)\ge\sup_{n\in\mathbb{N}}\mu(B_n)\ge\lim_{n\to\infty}\mu(B_n)=\bar{\mu}(A)$$



Czyli $\mu(B)=\bar{\mu}(A)$ gdzie $B\subseteq A$

Jeśli $\mu(A\setminus B)<\infty$, to $\mu(A)=\underbrace{\mu(B)}_{<\infty}+\underbrace{\mu(A\setminus B)}_{<\infty}<\infty$

a stąd $\boxed{\mu(A)=\bar{\mu}(A).}$

Jeśli $\mu(A\setminus B)=\infty$, to stąd że $\mu$-semi-skończona

istnieje $C\subseteq A\setminus B$ t.że $0<\mu(C)<\infty$.

Wtedy $B \cup C \subseteq A$ oraz $\mu(B \cup C) < \infty$.

$$\underset{\mu(B)+\mu(C)}{\shortparallel} \quad \underset{<\infty}{} \quad \underset{<\infty}{}$$

stąd

$$\bar{\mu}(A) = \mu(B) < \mu(B) + \underbrace{\mu(C)}_{>0} = \mu(B \cup C) \underset{\text{def } \bar{\mu}}{\leq} \bar{\mu}(A)$$

(2) Pokażemy, że $\boxed{L_1(\mu) \ni f \xrightarrow{\Phi} f \in L_1(\bar{\mu})}$ $\boxed{\begin{array}{l}\bar{\mu} \leq \mu \\ \bar{\mu}|_{\Sigma_0} = \mu|_{\Sigma_0}\end{array}}$

jest ponownie izometrią

a) $I_A \in L_1(\mu) \iff \mu(A) < \infty \implies \bar{\mu}(A) = \mu(A) < \infty$

$$\implies I_A \in L_1(\bar{\mu}) \text{ oraz } \underset{\mu(A)}{\int I_A \, d\mu} = \underset{\bar{\mu}(A)}{\int I_A \, d\bar{\mu}}$$

b) $s = \sum_{\substack{i=1 \\ a_i \neq 0}}^{n} a_i I_{A_i} \in L_1(\mu) \xRightarrow{\text{a) + liniowość}} \forall_{A_i \in \Sigma_0}$ $s \in L_1(\bar{\mu})$ oraz

$$\int s \, d\mu = \int s \, d\bar{\mu}$$

c) $f \geq 0$ oraz $f \in L_1(\mu)$

$$\infty > \int f \, d\mu = \sup\left\{ \int s \, d\mu : 0 \leq s \leq f,\ s = \sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i} \right\}$$

$$\overset{b)}{=} \sup\left\{ \int s \, d\bar{\mu} : 0 \leq s \leq f,\ s = \sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i},\ A_i \in \Sigma_0 \right\}$$

$$= \int f \, d\bar{\mu}$$

d) $f = f_+ - f_- \in L_1(\mu) \Leftrightarrow f_+, f_- \in L_1(\mu)$ i wtedy

$$\int f \, d\mu = \int f_+ \, d\mu - \int f_- \, d\mu = \int f_+ \, d\bar{\mu} - \int f_- \, d\bar{\mu}$$
$$= \int f \, d\bar{\mu}.$$

Żeby pokazać, że $\Phi$ jest surjekcją wystarczy pokazać, że jej obraz zawiera wszystkie funkcje charakterystyczne $\mathbb{1}_A \in L_1(\bar{\mu})$.

JAK W DOWODZIE 1)

$$\mathbb{1}_A \in L_1(\bar{\mu}) \Leftrightarrow \bar{\mu}(A) < \infty \Rightarrow \exists_{B \subseteq A} \; \mu(B) = \bar{\mu}(A) < \infty$$

$$\Rightarrow \bar{\mu}(A \setminus B) = \bar{\mu}(A) - \bar{\mu}(B) \underset{\bar{\mu}|_{\Sigma_0} = \mu|_{\Sigma_0}}{=} \bar{\mu}(A) - \mu(B) = 0$$

$\Rightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$ w $L_1(\bar{\mu})$ (bo są sobie równe $\bar{\mu}$ - prawie wszędzie) w $L_1(\bar{\mu})$

Oraz $\mathbb{1}_B \in L_1(\mu)$. Czyli $\Phi(\mathbb{1}_B) = \mathbb{1}_B \overset{\downarrow}{=} \mathbb{1}_A$. $\blacksquare$